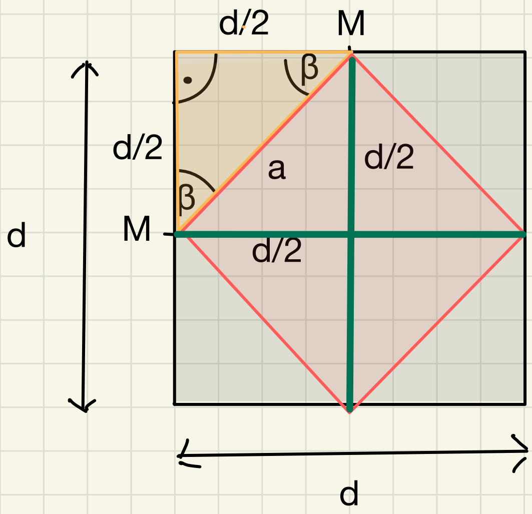
Bestimmung der Länge der Diagonalen im Quadrat ohne Pythagoras!



Wir betrachten ein Quadrat mit der Seitenlänge d.
Die Seiten Mitten M werden verbunden.
Dann ist die innere rote Figur wieder ein Quadrat!
Beweis
Es entstehen vier kongruente Dreiecke, die jeweils aus den beiden Seiten mit der Länge d/2 (nach Konstruktion) und einem rechten Winkel bestehen.
Damit sind die vier Dreiecke nach Kongruenzsatz SWS kongruent und stimmen damit auch in der Seitenlänge a überein!
Da die Dreiecke gleichseitig sind, müssen die Basiswinkel übereinstimmen und an jeder Ecke M liegt zweimal der Winkel β an.
Folglich muss der Innenwinkel im roten Viereck immer 90° sein. Damit ist es ein Quadrat!

d ist die Länge der Diagonalen im roten Quadrat!

Der Flächeninhalt des großen Quadrates ist d^2

Der Flächeninhalt des inneren Quadrates ist a^2

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d}{2}\right) \cdot \left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{8} d^2$

Damit kann der Flächeninhalt des großen Quadrates aber auch wie folgt geschrieben werden:

$$d^2 = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} d^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = a^2 + \frac{1}{2} d^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} d^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad d^2 = 2a^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{d = \sqrt{2} \cdot a}$$