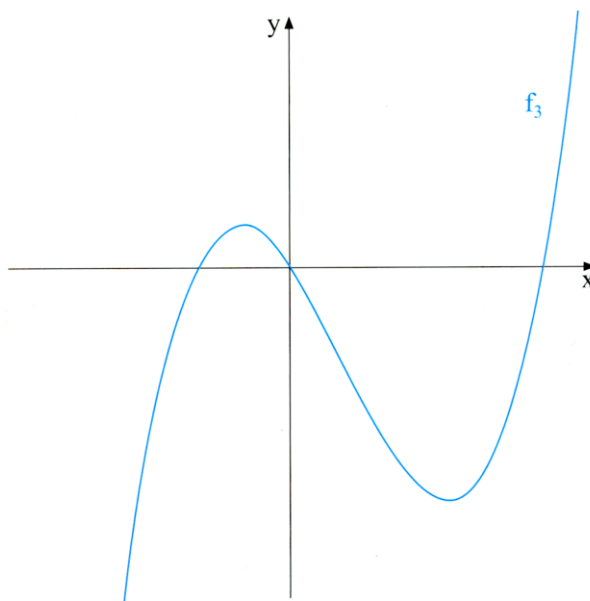


Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^3 - a \cdot x^2 - a^2 \cdot x$ für $a \in \mathbb{R}$.

In der nebenstehenden Skizze ist der Graph für $a = 3$ dargestellt.

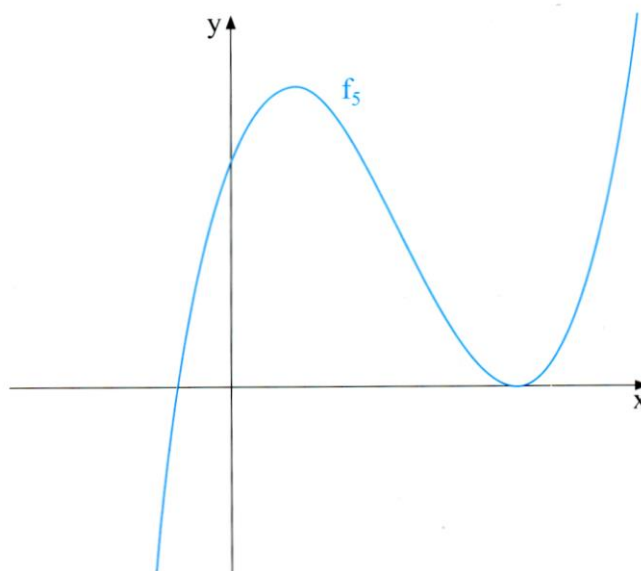


- Bestimmen Sie die Nullstellen in Abhängigkeit von a .
- Zeigen Sie, dass im Fall $a > 0$ der Punkt $T(a | -a^3)$ Tiefpunkt der Graphen von f_a ist.
- In welchem Punkt ist für $a > 0$ die Steigung von f_a minimal? Geben Sie die Koordinaten des Punktes an.
- Im Fall $a = 3$ hat der Graph von f_a den Tiefpunkt $T(3 | y_T)$ und den Wendepunkt $W(1 | y_W)$. Die Sekante durch T und W schließt mit dem Graphen von f_a eine Fläche ein. Wie groß ist der Inhalt dieser Fläche?
- Unter welchem Winkel schneiden sich im Fall $a = 3$ die Sekante durch T und W und die Wendetangente im Punkt W ?
- f_3 hat an der Stelle 1 die Steigung -12 . Gibt es unter den Kurven von f_a weitere Kurven, die an der Stelle 1 diese Steigung haben?
- Wir betrachten die Funktionen f_a an der Stelle $x = 1$. Machen Sie eine Aussage, wie sich die Steigung von f_a entwickelt, wenn a beliebig groß wird. Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = (x - a)^2(x + 1)$ für $a \in \mathbb{R}$.

In der nebenstehenden Skizze ist der Graph für $a = 5$ dargestellt.



- Geben Sie die Nullstellen an und bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f_a .
- Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist eine Nullstelle auch Wendestelle? Machen Sie für diesen Fall eine Aussage über das Monotonieverhalten von f_a .
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die Kurve zu f_5 , die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die x -Achse einschließen.
- Zeigen Sie für f_5 , dass der Hoch-, Tief- und Wendepunkt auf einer Geraden liegen.
- Diese Gerade schließt mit dem Graphen von f_5 zwei Flächen ein. Zeigen Sie, dass die Flächen gleich groß sind.

Aufgabe 3

1. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_a(x) = \frac{1}{12a}x^3 - x^2 + 3ax, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

In der nebenstehenden Skizze ist der Graph für $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{2}$ und $a = 1$ dargestellt.

- a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a .

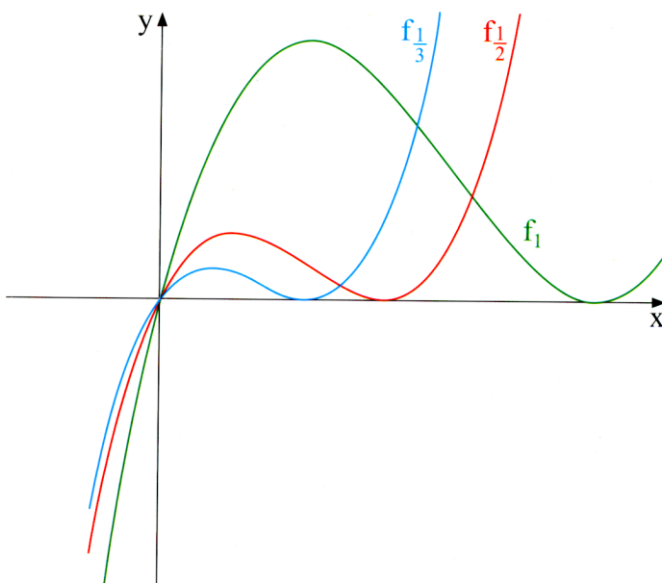
- b) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f_a und ermitteln Sie die Extrema.

- c) Der Punkt $P(z | f_1(z))$ bildet mit dem Ursprung $O(0|0)$ und dem Punkt $Q(z|0)$ ein achsenparalleles Dreieck ($0 \leq z \leq 6$).

Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass das Dreieck maximalen Inhalt hat.

- d) Die Tangente durch $W(4a | \frac{4}{3}a^2)$ schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Für welches a hat das Dreieck den Inhalt 384?

- e) Der Graph jeder Funktion f_a schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. Bestimmen sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a .



Lösungen

1

12. a) Nullstellen: $x = 0$ und $x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

b) $a > 0$: $f'_a(x) = 3x^2 - 2ax - a^2$, $f''_a(x) = 6x - 2a$, $f''_a(x) = 0$ gilt für $x = \frac{a}{3} \pm \frac{2}{3}a$
 $x_1 = a$, $f''_a(a) = 4a > 0$, also Tiefpunkt $T(f_a(a)) = T(a| -a^3)$

c) $a > 0$: $f''_a(x) = 0$ gilt für $x = \frac{a}{3}$, $f'''_a(\frac{a}{3}) = 6 > 0$

Für $x = \frac{a}{3}$ ist die Steigung also minimal in $P(\frac{a}{3} | -\frac{11}{27}a^3)$.

d) $a = 3$: $T(3| -27)$, $W(1| -11)$; Sekante durch T und W: $s(x) = -8x - 3$

$$A = \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3) dx = [-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x]_1^3 = (2,25) - (-1,75) = 4$$

Die eingeschlossene Fläche hat den Inhalt 4.

e) $a = 3$: Wendetangente: $t(x) = -12x + 1$

Steigungswinkel: Sekante: $\alpha \approx 97,1^\circ$; Tangente: $\beta \approx 94,8^\circ$

Schnittwinkel von s und t: $\gamma \approx 2,3^\circ$

f) $f'_a(1) = 3 - 2a - a^2 = -12$ gilt für $a = 3$ und $a = -5$.

f_{-5} hat an der Stelle $x = 1$ ebenfalls die Steigung -12 .

g) $f'_a(1) = 3 - 2a - a^2 \rightarrow -\infty$ für $a \rightarrow \infty$

2

13. a) Nullstellen: $x = a$ und $x = -1$

$$f'_a(x) = 3x^2 + x(2 - 4a) + a^2 - 2a, f''_a(x) = 6x + 2 - 4a$$

b) $f''_a(x) = 0$: $x = \frac{2a-1}{3}$, $\frac{2a-1}{3} = -1$, $a = -1$, $\frac{2a-1}{3} = a$, $a = -1$

Für $a = -1$ ist die Wendestelle zugleich auch Nullstelle.

$$c) \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 15x + 25) dx = [\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 7,5x^2 + 25x]_1^5 = (93,75) - (29,75) = 64$$

d) $f_5(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25$, $f'_5(x) = 3x^2 - 18x + 15$, $f''_5(x) = 6x - 18$, $f'''_5(x) = 6$
 $f'_5(x) = 0$ gilt für $x = 1$ und $x = 5$.

$f''_5(1) = -12$, also H(1|32); $f''_5(5) = 12$, also T(5|0)

$f''_5(x) = 0$ gilt für $x = 3$: W(3|16)

Gerade durch H und T: $y(x) = -8x + 40$

Punktprobe mit W: $y(3) = 16$

W liegt auf der Geraden durch H und T.

$$e) \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 23x - 15) dx = [\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x]_1^5 = (-6,25) - (-6,25) = 0$$

Die Flächenbilanz ist null, also sind die Anteile gleich groß.

3

13. a) Nullstellen:
- $x = a$
- und
- $x = -1$

$$f_a'(x) = 3x^2 + x(2-4a) + a^2 - 2a, \quad f_a''(x) = 6x + 2 - 4a$$

- b)
- $f_a''(x) = 0: \quad x = \frac{2a-1}{3}, \quad \frac{2a-1}{3} = -1, \quad a = -1, \quad \frac{2a-1}{3} = a, \quad a = -1$

Für $a = -1$ ist die Wendestelle zugleich auch Nullstelle.

$$c) \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 15x + 25) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 7,5x^2 + 25x \right]_1^5 = (93,75) - (29,75) = 64$$

- d)
- $f_5(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 25, \quad f_5'(x) = 3x^2 - 18x + 15, \quad f_5''(x) = 6x - 18, \quad f_5'''(x) = 6$

$f_5'(x) = 0$ gilt für $x = 1$ und $x = 5$.

$f_5''(1) = -12$, also $H(1|32)$; $f_5''(5) = 12$, also $T(5|0)$

$f_5''(x) = 0$ gilt für $x = 3$: $W(3|16)$

Gerade durch H und T: $y(x) = -8x + 40$

Punktprobe mit W: $y(3) = 16$

W liegt auf der Geraden durch H und T.

$$e) \int_1^5 (x^3 - 9x^2 + 23x - 15) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x \right]_1^5 = (-6,25) - (-6,25) = 0$$

Die Flächenbilanz ist null, also sind die Anteile gleich groß.