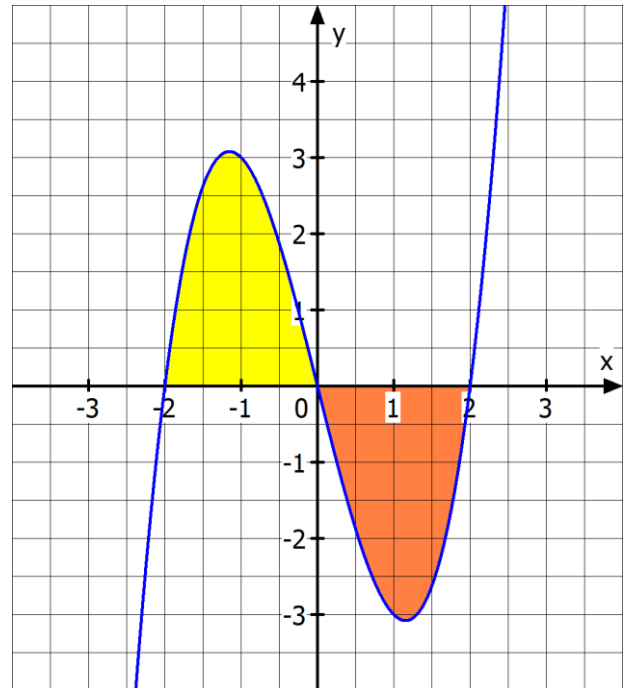


Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^3 - 4 \cdot x$ und berechnen $\int_{-2}^2 f(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{Es ist: } \int_{-2}^2 x^3 - 4x \, dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}(2)^4 - 2(2)^2 \right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2 \right) \\ &= 4 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Wert des Integrals Null ist.

Liegt eine Fläche unterhalb der x-Achse, so liefert das Integral einen Negativen Wert. Liegt die Fläche oberhalb der x-Achse, so ist der Wert des Integrals positiv. Der Wert der positiven Fläche und der „negativen“ Fläche heben sich hier also gegenseitig auf. $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$.



Wenn die Funktion f die Veränderung einer Größe in einem Intervall $[a; b]$ beschreibt, lässt sich die **orientierte Fläche** $\int_a^b f(x) dx$ zwischen dem Graphen von f und der x-Achse als **Gesamteffekt der Größe** zwischen a und b deuten.

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0 \text{ [Wert des Integrals]} - \text{orientierter Flächeninhalt}$$

Will man also den **absoluten Flächeninhalt** bestimmen, so muss man **von Nullstelle zu Nullstelle integrieren** und die Einzelflächen aufaddieren.

$$f(x) = x^3 - 4 \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ oder } x = -2$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = 4 \quad \int_0^2 f(x) dx = -4 \Rightarrow \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) dx \right| = |4| + |-4| = 8 - \text{absoluter Flächeninhalt}$$

Aufgabe 1

Bestimme zu folgenden Funktionen den orientierten und den absoluten Flächeninhalt, den die Funktionen mit der x-Achse einschließen! Veranschauliche in einer Skizze!

a) $f(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 1)(x - 3)(x + 4)$ b) $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1)(x + 3)$

Aufgabe 2

Die Funktion $f(x) = 0,5x^4 - 5,5x^3 + 17x^2 - 12x$ beschreibt den Zulauf (Abfluss) – Geschwindigkeit an Wasser in eine Wasserbecken in m^3/h . $x \in [0; 7]$

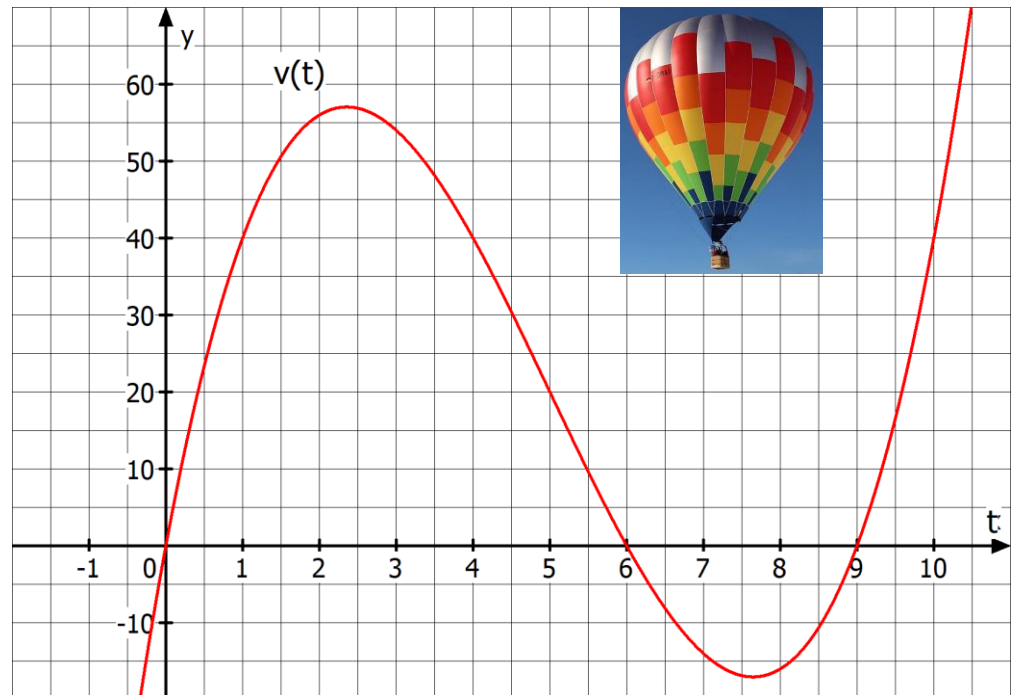
a) Berechnen Sie den Zufluss/Abfluss in der ersten Stunde?

- b) Wie hoch ist der Zufluss/Abfluss von der ersten bis zur vierten Stunde bzw. von der 4. bis zur 6. Stunde?
- c) Wie groß ist der Gesamteffekt (Gesamtabfluss/Zufluss) im Intervall $[0;7]$?
- e) Wie viel Wasser ist nach 7 Stunden im Becken wenn zu Beginn bereits 50m^3 im Becken waren?
- f) Geben Sie eine Stammfunktion F von f an, zeichnen Sie diese zusammen mit f in ein Koordinatensystem und erläutern die Zusammenhänge

Aufgabe 3

Die Funktion $v(t)$ mit $v(t) = t^3 - 15t^2 + 54t$ beschreibt für $t \in [0;9]$ Die Höhenänderungsrate eines Heißluftballons (Fall- und Steiggeschwindigkeit) in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

- a) Was bedeuten positive und negative Werte von $v(t)$?
- b) Untersuche $v(t)$ rechnerisch auf Nullstellen und Extremwerte!
- c) Der Graph von $v(t)$ schließt mit der t -Achse zwei Teilflächen ein. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Teilflächen und deuten Sie die Maßzahlen im Sachzusammenhang!

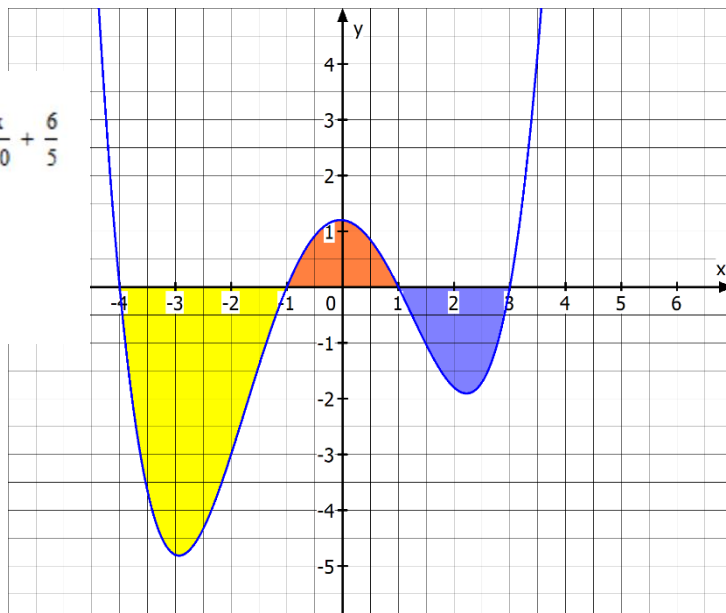


- d) Berechnen Sie $\int_0^9 v(t) dt$ und interpretieren Sie dieses Ergebnis!
- e) Für $t=0$ befindet sich der Ballon in einer Höhe von 100m . Geben Sie eine Funktion $h(t)$ an, die die Höhe des Ballons in Metern in Abhängigkeit von t beschreibt!
- f) Weisen Sie nach, dass $h(t)$ zwei Wendestellen besitzt. Was bedeuten die Wendestellen im Sachzusammenhang?

Aufgabe1

$$f(x) := \frac{1}{10} \cdot (x^2 - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 4) \text{ sammeln} \rightarrow \frac{x^4}{10} + \frac{x^3}{10} - \frac{13 \cdot x^2}{10} - \frac{x}{10} + \frac{6}{5}$$

$$\int f(x) dx \rightarrow \frac{x^5}{50} + \frac{x^4}{40} - \frac{13 \cdot x^3}{30} - \frac{x^2}{20} + \frac{6 \cdot x}{5}$$



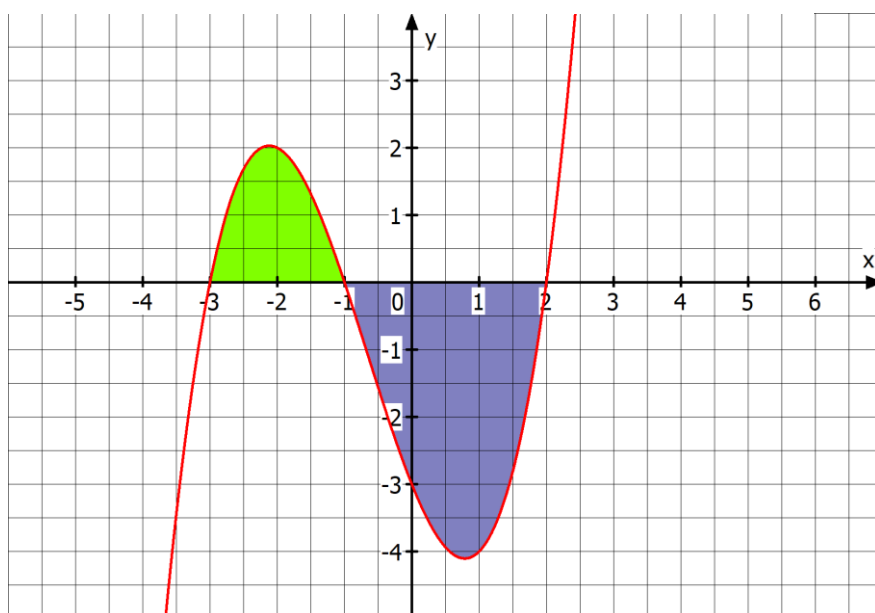
$$A1 := \int_{-4}^{-1} f(x) dx \rightarrow -\frac{1773}{200} = -8.865$$

$$A2 := \int_{-1}^1 f(x) dx \rightarrow \frac{118}{75} = 1.573$$

$$A3 := \int_1^3 f(x) dx \rightarrow -\frac{182}{75} = -2.427$$

$$\int_{-4}^3 f(x) dx \rightarrow -\frac{5831}{600} = -9.718$$

$$\text{Absolut} := |A1| + |A2| + |A3| \rightarrow 12.865$$



$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{5 \cdot x}{2} - 3 \right) dx \rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^2 \left(\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{5 \cdot x}{2} - 3 \right) dx \rightarrow -\frac{63}{8}$$

$$\int_{-3}^2 \left(\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{5 \cdot x}{2} - 3 \right) dx \rightarrow -\frac{125}{24}$$

$$\text{Absolut} := \frac{8}{3} + \frac{125}{24} \rightarrow \frac{63}{8} = 7.875$$

Aufgabe 2

$$f(x) := \frac{1}{2}x^4 - \frac{11}{2}x^3 + 17x^2 - 12x$$

$$\int_1^4 f(x) dx \rightarrow \frac{747}{40}$$

$$\int f(x) dx \rightarrow \frac{x^5}{10} - \frac{11x^4}{8} + \frac{17x^3}{3} - 6x^2$$

$$\int_4^6 f(x) dx \rightarrow -\frac{202}{15}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \rightarrow -\frac{193}{120} = -1.608$$

Gesamteffekt im Intervall [0;7]

$$\int_0^7 \left(\frac{1}{2}x^4 - 5.5x^3 + 17x^2 - 12x \right) dx \rightarrow 28.991666666666666667$$

Menge im Wasserbecken:

$$\int_0^7 \left(\frac{1}{2}x^4 - 5.5x^3 + 17x^2 - 12x \right) dx + 50 \rightarrow 78.991666666666666667$$

Stammfunktion:

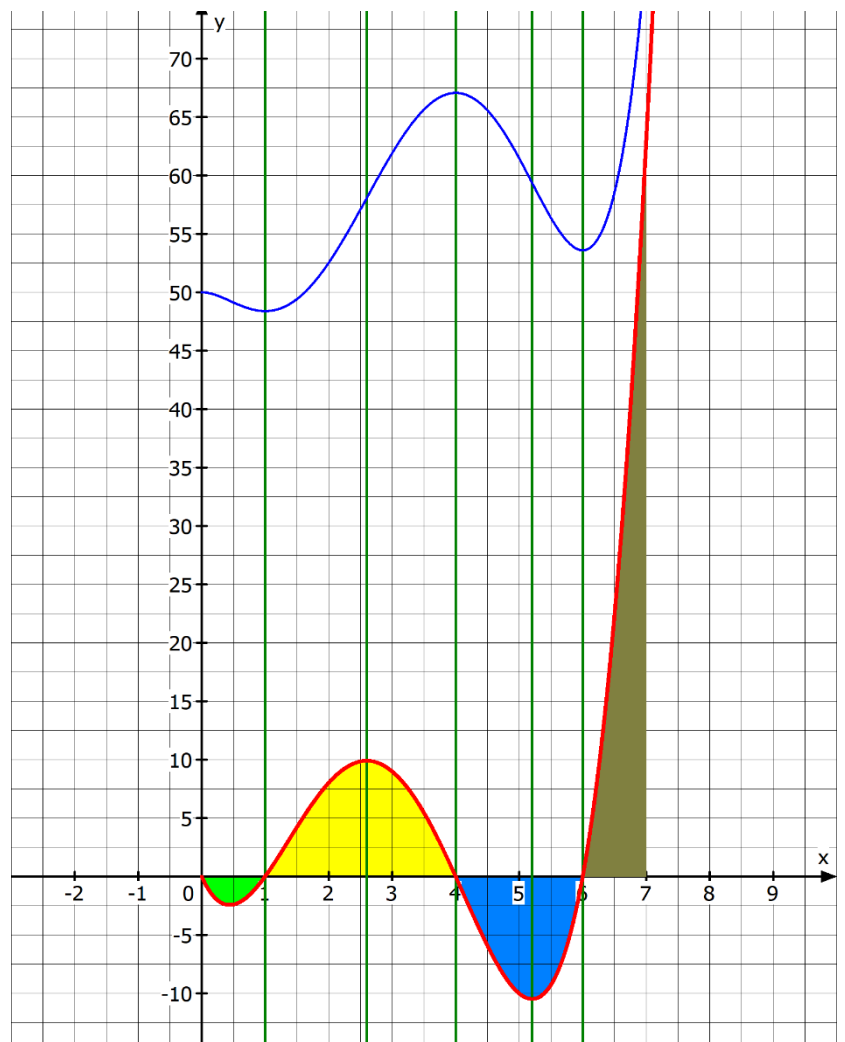
$$f(x) := 0.5x^4 - 5.5x^3 + 17x^2 - 12x$$

$$F(x) := \int_0^x f(k) dk + 50 \rightarrow \int_0^x (17k^2 - 12k + -5.5k^3 + 0.5k^4) dk + 50 \text{ sammeln, } x \rightarrow 0.1x^5 - 1.375x^4 + \frac{17x^3}{3} - 6x^2 + 50$$

f beschreibt die Zufluss/Abluss-Geschwindigkeit. F die vorhandene Wassermenge

Ist f kleiner Null, dann fällt F , ist f größer Null, so steigt F

Dort, wo F eine Extremstelle hat, hat f eine Nullstelle. Die Wendepunkte von F , sind die Extremstellen von f .



Aufgabe 3

- a) $V(t) > 0$ heißt positive Höhenänderungsrate also der Ballon steigt; $v(t) < 0$ heißt negative Höhenänderungsrate also der Ballon sinkt!

b)

$$v(t) := t^3 - 15t^2 + 54t$$

$$v(t) \text{ Faktor, } t \rightarrow t \cdot (t - 6) \cdot (t - 9)$$

$$v(t) = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$v1(t) := \frac{d}{dt} v(t) \rightarrow 3 \cdot t^2 - 30 \cdot t + 54$$

$$v2(t) := \frac{d}{dt} v1(t) \rightarrow 6 \cdot t - 30$$

$$v1(t) = 0 \text{ auflösen, } t \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{7} + 5 \\ 5 - \sqrt{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.646 \\ 2.354 \end{pmatrix}$$

$$v2(\sqrt{7} + 5) \rightarrow 6 \cdot \sqrt{7} \quad \text{größer Null also Minimum}$$

$$v2(5 - \sqrt{7}) \rightarrow -6 \cdot \sqrt{7} \quad \text{kleiner Null also Maximum}$$

$$v(5 - \sqrt{7}) = 57.041 \quad \text{HP}(2,354/57,041)$$

$$v(\sqrt{7} + 5) = -17.041 \quad \text{TP}(7,645/-17,041)$$

c)

Das Integral von Null bis sechs Minuten beschreibt den gesamtzurückgelegten Weg (Höhe) des Ballons in diesem Intervall also 216 m

$$\int_0^6 t^3 - 15t^2 + 54t \, dt \rightarrow \frac{t^4}{4} - 5 \cdot t^3 + 27 \cdot t^2$$

Von sechs bis neun Minuten sinkt der Ballon und zwar insgesamt um 33,75 Meter

$$\int_0^6 t^3 - 15t^2 + 54t \, dt \rightarrow 216$$

Wenn man davon ausgeht, dass der Ballon schon eine Höhe von 100m zum Zeitpunkt $t=0$ hatte, so wäre diese insgesamt noch zu addieren!

$$\int_6^9 t^3 - 15t^2 + 54t \, dt \rightarrow -\frac{135}{4} = -33.75$$

d)

$$\int_0^9 t^3 - 15t^2 + 54t \, dt \rightarrow \frac{729}{4} = 182.25$$

beschreibt den Gesamteffekt aus Anstieg und Sinken also eine Gesamthöhe von 182,25 m

e)

$$h(t) = \frac{1}{4}t^4 - 5t^3 + 27t^2 + 100$$

$$h'(t) = v(t)$$

$h''(t) = v'(t)$ also sind die Wendestellen von h die Extremstellen von v , also die Stellen, an denen sich die Geschwindigkeit maximal oder minimal ist. Nach 2,354 Minuten hat der Ballon eine maximale Steiggeschwindigkeit erreicht. Nach 7,656 Minuten hat die Fallgeschwindigkeit ihr Minimum erreicht.

