Aufgabe 1. Berechne folgende Integrale!

a) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^2 + x\,dx$ b) $\int_{1}^{4} -2x^3 + 2x - 1\,dx$ c) $\int_{-2}^{3} \frac{2x^3 - 4x}{x}\,dx$ d) $\int_{1}^{2} 6x^3 - \frac{3}{x^2}\,dx$

Aufgabe 2. Berechne den Flächeninhalt, den der Graph mit der x-Achse einschließt!

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}\cdot(x-2)(x+3)$ c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}\cdot x^4$

Aufgabe 3. Berechne die Fläche, die der Graph mit der x-Achse in den angegebenen Grenzen einschließt und skizziere in einer Zeichnung!

a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ [1; 4] b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 1$ [1; 3] c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$ [-2; 2]

Aufgabe 4. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von $f(x) = 4x^2 - x$, die ihren Tiefpunkt auf der x-Achse hat!

Aufgabe 5. Entscheide, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Falsche Aussagen sollen durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden! Richtige Aussagen sollten argumentativ begründet werden!

a) Hat eine Funktion f eine Stammfunktion F, dann gibt es auch eine zweite Funktion G, die ebenfalls Stammfunktion von f ist und F und G unterscheiden sich!

b) Eine Nullstelle von f kann auch eine Nullstelle von F sein!

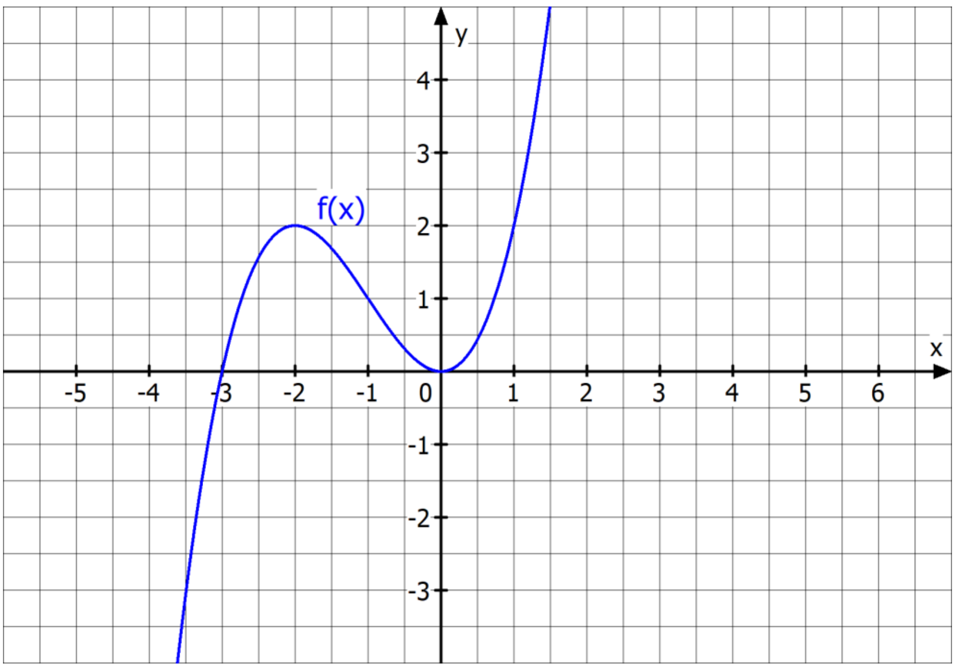
c) Eine Nullstelle von f ist stets eine Extremstelle von F!

d) Eine Extremstelle von F ist stets eine Nullstelle von f!

e) Ist f eine ganzrationale Funktion mit dem Grad n >0, so ist F eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1

f) Ein Sattelpunkt von F ist stets eine Nullstelle von f

Aufgabe 6. Skizziere zu folgenden Graphen f eine Stammfunktion F



Lösungen

Aufgabe 1

a) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^2 + x \, dx = \left|\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right|_{-1}^{2} = (\frac{1}{6}2^3 + \frac{1}{2}2^2) - (\frac{1}{6}(-1)^3 + \frac{1}{2}(-1)^2) = 3$

b) $\int_{1}^{4} -2x^3 + 2x - 1 \, dx = \left|-\frac{2}{4}x^4 + x^2 - x\right|_{1}^{4} = -\frac{231}{2}$

c) $\int_{-2}^{3} \frac{2x^3 - 4x}{x} \, dx = \int_{-2}^{3} 2x^2 - 4dx = \left|\frac{2}{3}x^3 - 4x\right|_{-2}^{3} = \frac{10}{3}$

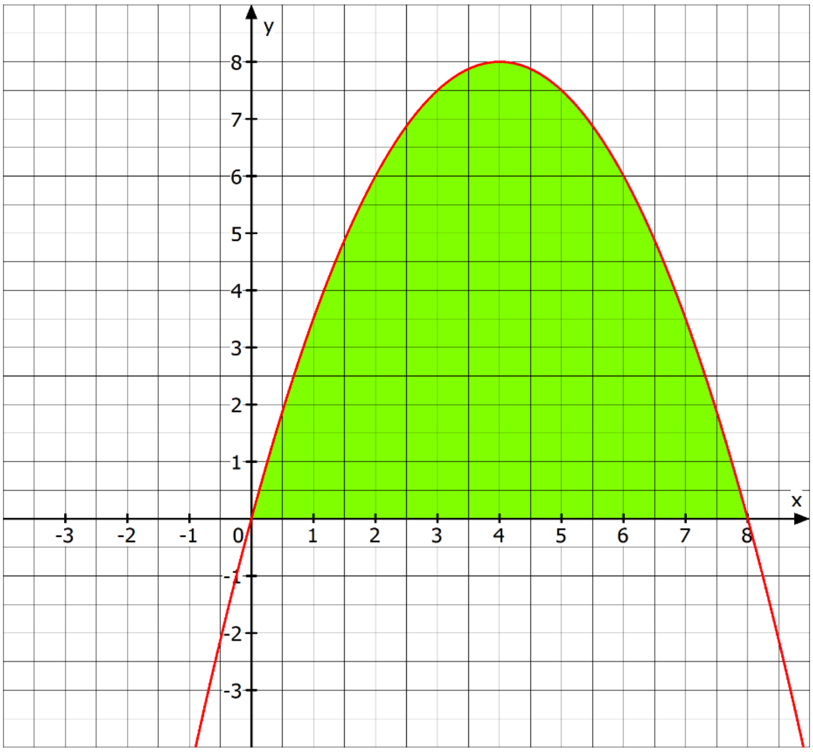
d) $\int_{1}^{2} 6x^3 - \frac{3}{x^2} \, dx = \left|\frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{x}\right|_{1}^{2} = (\frac{3}{2}2^4 + \frac{3}{2}) - (\frac{3}{2}1^4 + \frac{3}{1}) = 21$

Aufgabe 2

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$

f(x)=0 ⇔ x= 0 oder x = 8

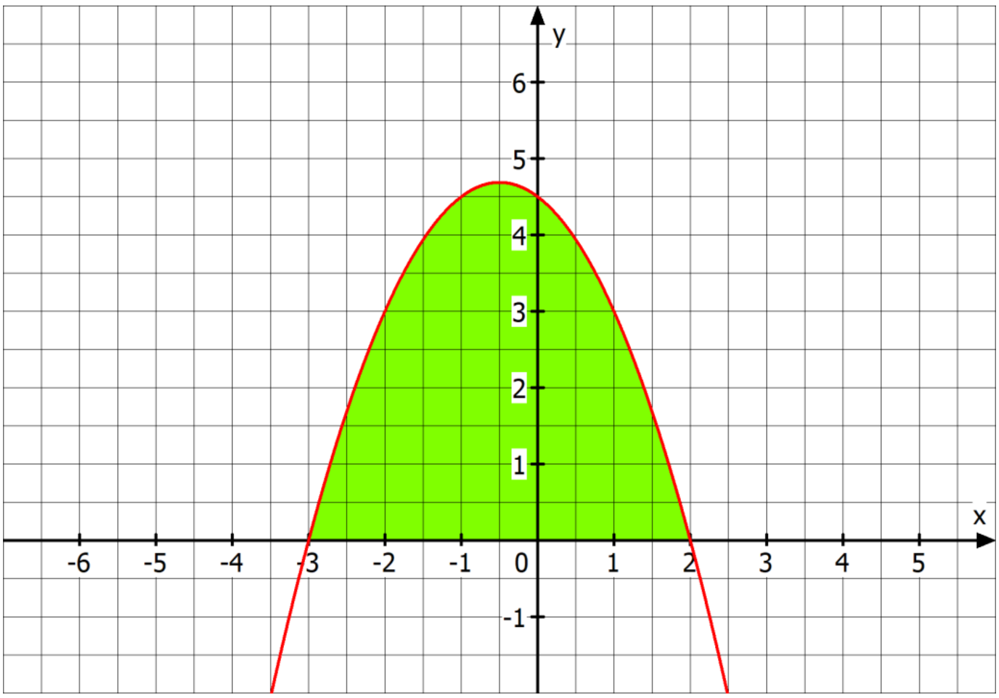
$\int_{0}^{8} -\frac{1}{2}x^2 + 4x \, dx = \left|-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right|_{0}^{8} = \frac{128}{3} FE$



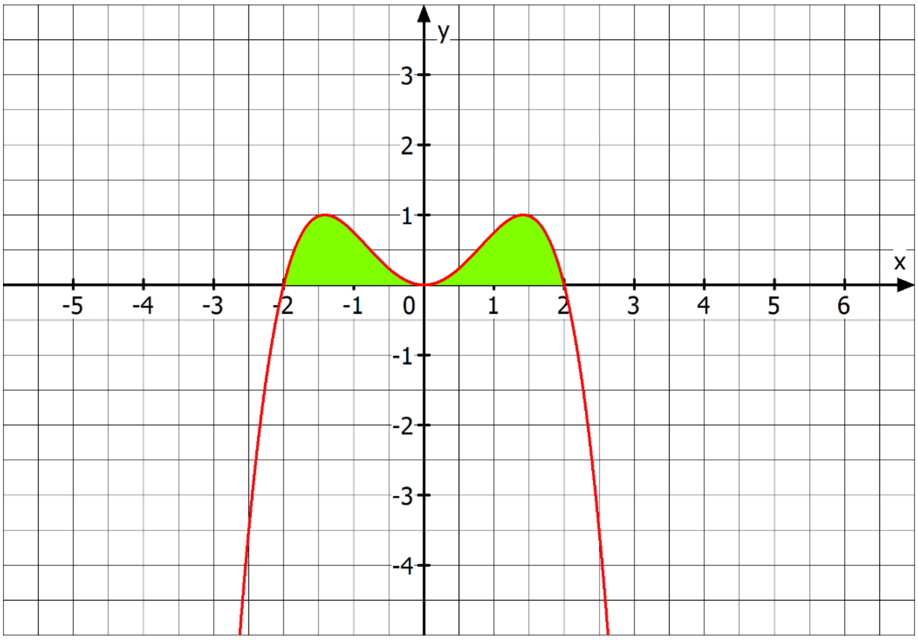
b) f(x)=0 ⇔ x=-3 oder x=2

$\int_{-3}^{2} -\frac{3}{4}(x-2)(x+3) \, dx = \int_{-3}^{2} -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \, dx$

$= \left|-\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{2}x\right|_{-3}^{2} = \frac{125}{8} FE$

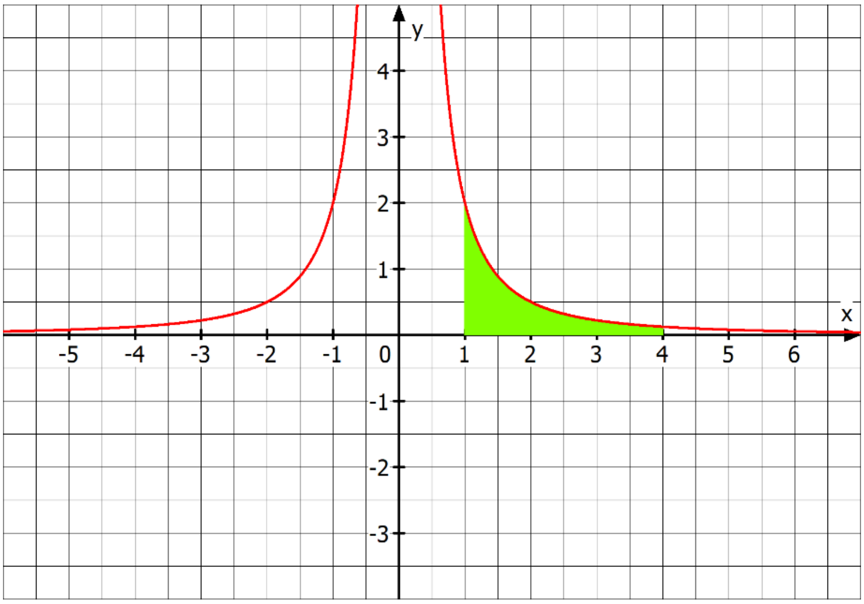


c) $$\int_{-2}^{2} x^2 - \frac{1}{4}x^4 \, dx = \left| \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5 \right|_{-2}^{2}$$
$$= \frac{32}{15} FE$$

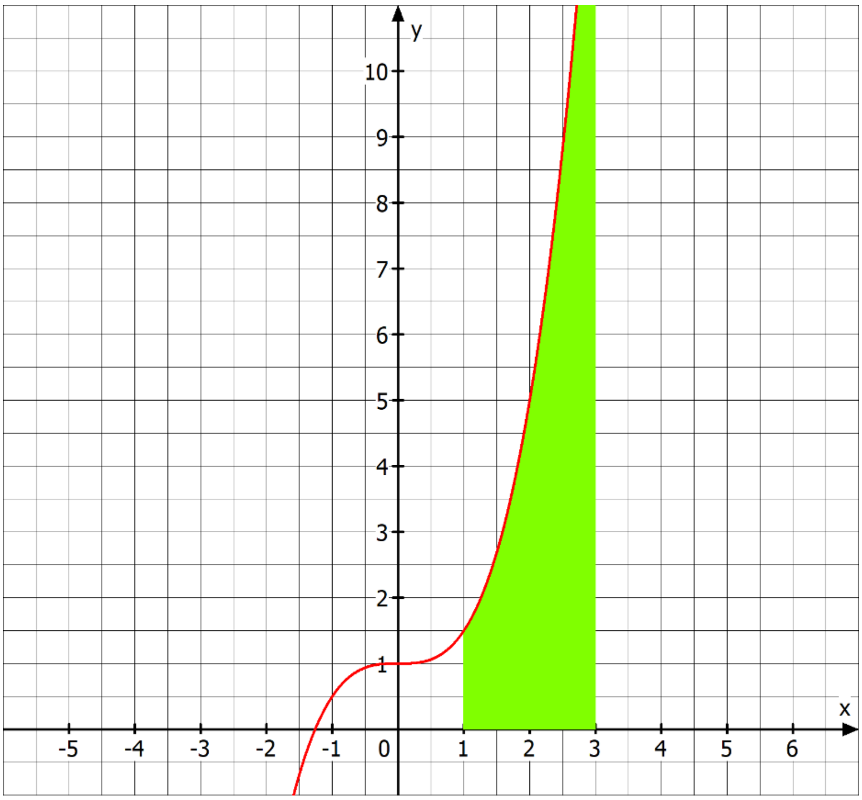


Aufgabe 3

a) $$\int_{1}^{4} \frac{2}{x^2} \, dx = \left| -\frac{2}{x} \right|_{1}^{4} = -\frac{2}{4} - (-\frac{2}{1}) =$$
$$= -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} FE$$

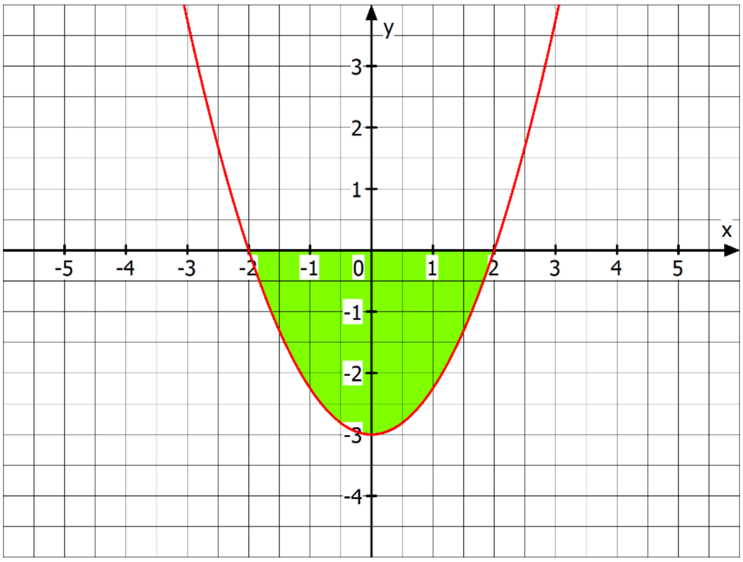


b) $$\int_{1}^{3} \frac{1}{2}x^3 + 1 \, dx = \left| \frac{1}{8}x^4 + x \right|_{1}^{3} =$$
$$= (\frac{1}{8}3^4 + 3) - (\frac{1}{8}1^4 + 1) =$$
$$= 12 FE$$



c) $$\int_{-2}^{2} \frac{3}{4}x^2 - 3\,dx = \left|\frac{1}{4}x^3 - 3x\right|_{-2}^{2} = -8$$

Die Fläche ist negativ, da sie unterhalb der x-Achse liegt.



Aufgabe 4

$$F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$F'(x) = 4x^2 - x \qquad F''(x) = 8x - 1$

$F'(x) = 0 \qquad 4x^2 - x = 0 \qquad x(4x-1) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{4}$

$F''(0) = -1 < 0$ 0 ist eine Maximumstelle von F

$F''\left(\frac{1}{4}\right) = 1 > 0$ $\frac{1}{4}$ ist eine Minimumstelle von F

Der Tiefpunkt liegt auf der x-Achse, falls gilt: $F\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + c = 0 \qquad \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{64} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + c = 0 \qquad \frac{1}{48} - \frac{1}{32} + c = 0$

$c = \frac{1}{32} - \frac{1}{48} = \frac{3}{96} - \frac{2}{96} = \frac{1}{96}$

Ergebnis: $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{96}$

Aufgabe 5 Entscheide, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Falsche Aussagen sollen durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden!

a) Hat eine Funktion f eine Stammfunktion F, dann gibt es auch eine zweite Funktion G, die ebenfalls Stammfunktion von f ist und F und G unterscheiden sich! **Ja alle Stammfunktionen unterscheiden sich in einer Konstanten**

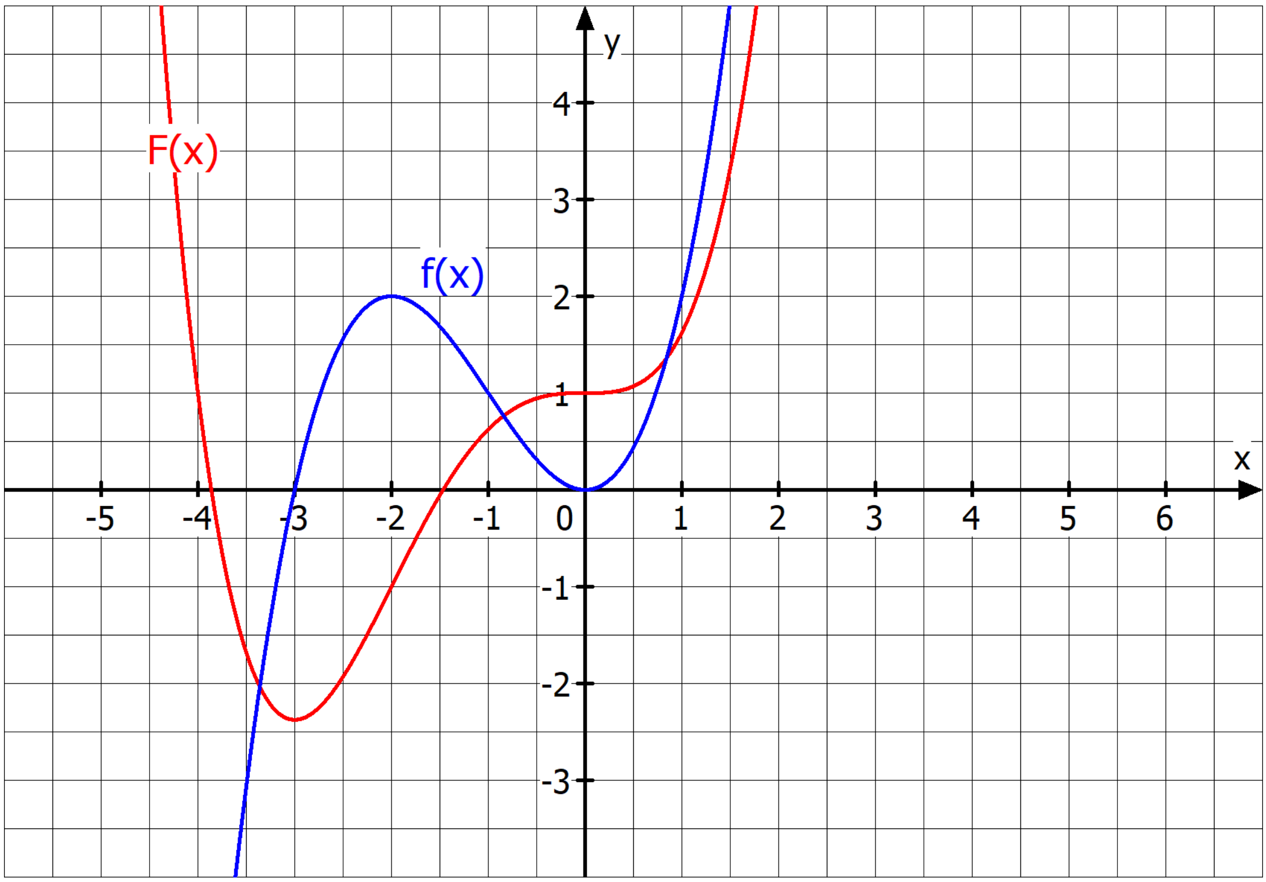
b) Eine Nullstelle von f kann auch eine Nullstelle von F sein! **Ja stimmt z.B. $f(x)=x^2$ und $F(x)=1/3x^3$ x=0 ist Nullstelle**

c) Eine Nullstelle von f ist stets eine Extremstelle von F! **Die Aussage ist falsch z.B. $f(x)=1/3x^2$ hat die Nullstelle x = 0 aber $F(x)=x^3$ hat an der Stelle x =0 keine Extremstelle, sondern einen Wendepunkt**

d) Eine Extremstelle von F ist stets eine Nullstelle von f! **Ja, die Aussage ist richtig, denn hat F eine Extremstelle bei x_e, dann muss $F`(x_E)=f(X_E)=0$ sein (notwendige Bedingung für Extremwerte)**

e) Ist f eine ganzrationale Funktion mit dem Grad n >0, so ist F eine ganzrationale Funktion vom Grad n-1. **Aussage ist falsch da der Grad der Stammfunktion n+1 ist**

f) Ein Sattelpunkt von F ist stets eine Nullstelle von f! **Ja, die Aussage ist richtig, da notwendig für einen Sattelpunkt gilt $F`(X_s)=f(X_s)=0$**



Begründung

Für x< -3 ist f(x) < 0 also F(x) streng monoton fallend.

Für x>-3 und x<0 ist f(x) >0 also F(x) streng monoton steigend

An der Stelle x =-3 hat f VZW und eine Nullstelle also hat F dort eine Extremwert VZW von – nach + also Tiefpunkt

An der Stelle x =0 hat f(x) Nullstelle und Extremstelle auf der x-Achse (also kein VZW) F hat hier einen Sattelpunkt

Für x>0 ist f(x) größer null also F strengmonoton steigend