I Kriterien für Wendestellen, Seite 9

1 a) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x + 3;$
$f''(x) = 4x^2 - 4;$ $f'''(x) = 8x$
Nullstellen von f' bestimmen: $4x^2 - 4 = 0$
Faktorisieren: $4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) = 0$
Nullstellen: $x_1 = -1;$ $x_2 = 1$
Einsetzen der Nullstellen in die 3. Ableitung:
$f'''(-1) = -8;$ $f'''(1) = 8$
Koordinaten der Wendepunkte bestimmen:
$f(-1) = \frac{1}{3} - 2 - 3 = -4\frac{2}{3};$ $W_1\left(-1 \middle| -4\frac{2}{3}\right)$
$f(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = 1\frac{1}{3};$ $W_2\left(1 \middle| 1\frac{1}{3}\right)$

b) $f'(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2$
$f''(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$
$f'''(x) = 3x^2 + 6x + 2$
Nullstellen von f'' bestimmen: $x^3 + 3x^2 + 2x = 0;$
$x \cdot (x^2 + 3x + 2) = 0;$ $x_1 = 0;$ $x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2};$
$x_2 = -1;$ $x_3 = -2$
Einsetzen der Nullstellen in die 3. Ableitung:
$f'''(0) = 2;$ $f'''(-1) = -1;$ $f'''(-2) = 2$
Koordinaten der Wendepunkte bestimmen:
$f(0) = 0;$ $W_1(0|0)$
$f(-1) = -\frac{2}{15};$ $W_2\left(-1 \middle| -\frac{2}{15}\right)$
$f(-2) = -\frac{4}{15};$ $W_3\left(-2 \middle| -\frac{4}{15}\right)$

2 a) Wahr, denn der Graph von f' hat bei $x = -2$ eine Nullstelle mit VzW von − nach +.
b) Falsch, denn der Graph von f hat bei $x = 0$ und $x = 4$ Wendepunkte.
c) Wahr, denn f'' ist in $[-2; 0]$ positiv.
d) Falsch, denn f ist in $[0, 4]$ streng monoton wachsend.

3 Ableitungen: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2x;$
$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2;$ $f'''(x) = 24x + 6a$
Da 1 eine Wendestelle von f ist, gilt die notwendige Bedingung $f''(1) = 0$.
Demnach gilt: $12 + 6a + 2 = 0;$ $6a = -14;$ $a = -\frac{7}{3}$
Also: $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^3 + x^2;$ $f(1) = -\frac{1}{3};$ $W\left(1 \middle| -\frac{1}{3}\right)$
Wendetangente: $y = m \cdot x + n$
$f'(x) = 4x^3 - 7x^2 + 2x;$ $m = f'(1) = 4 - 7 + 2 = -1;$ $y = -x + n$
Einsetzen der Koordinaten von W: $-\frac{1}{3} = -1 + n;$ $n = \frac{2}{3}$
Ergebnis: $y = -x + \frac{2}{3}$