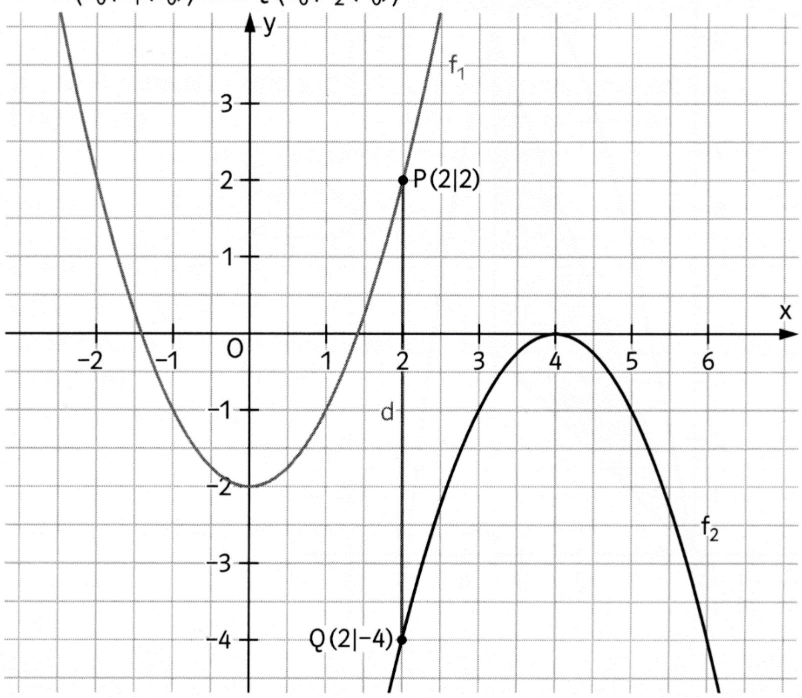
I Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen, Seite 10

1 Oberflächeninhalt (Seitenlänge a, Höhe h): $O = 2a^2 + 4ah$
Rauminhalt (Nebenbedingung): $V = a^2 h = 1000$ bzw.
$h = 1000/a^2$
Quaderoberfläche (Zielfunktion):
$O(a) = 2a^2 + 4a \cdot 1000/a^2 = 2a^2 + 4000/a;\ a \in \mathbb{R}_0^+$
Untersuchung der Zielfunktion auf Extremwerte:
$O'(a) = 4a - 4000/a^2;\ O''(a) = 4 + 8000/a^3$
$O'(a) = 0$ für $a = 10;\ O''(10) > 0$
lokale Minimumstelle: 10; lokales Minimum: 600
Ergebnis: Bei einer quadratischen Grundfläche mit der Seitenlänge 10 cm wird der Oberflächeninhalt des Quaders minimal. Der Flächeninhalt beträgt dann 600 cm^2.

2 $P(x_0 \mid f_1(x_0))$ $\quad$ $Q(x_0 \mid f_2(x_0))$

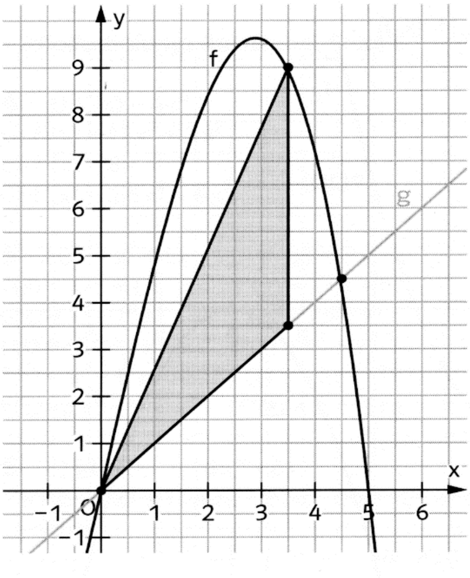


$d(x) = f_1(x) - f_2(x) = (x^2 - 2) - (-x^2 + 8x - 16) = 2x^2 - 8x + 14$
$d'(x) = 4x - 8$
$d''(x) = 4$
$d'(x) = 0$ für $x_0 = 2$
$d''(2) > 0$
$d(2) = 6$
Für die x- Koordinate $x_0 = 2$ haben die Punkte P und Q einen minimalen Abstand. Der minimale Abstand beträgt 6 LE.

3 $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$
(1) Formel; Flächeninhalt eines Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2}a\,h_a$
(2) Nebenbedingung; P liegt auf dem Graphen von f: $h_a = f(a)$
(3) Zielfunktion; Flächeninhalt des Dreiecks OQP:
$A(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = -\frac{1}{8}a^3 + a^2$
(4) Untersuchung der Zielfunktion:
$A'(a) = -\frac{3}{8}a^2 + 2a = a \cdot \left(-\frac{3}{8}a + 2\right)$
$A'(a) = 0$ für $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{16}{3}$
An den Rändern des Definitionsbereichs gilt:
$A(0) = 0$ und $A(8) = 0$, d.h. hier ist der Flächeninhalt des Dreiecks minimal.
Die Flächeninhaltsfunktion A hat an der Stelle $a_2 = \frac{16}{3}$ einen Vorzeichenwechsel von + nach −, folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks OQP für $a_2 = \frac{16}{3}$ maximal. Der maximale Flächeninhalt beträgt $A\left(\frac{16}{3}\right) \approx 9{,}48$ FE.

4 a) Tragfähigkeit des Balkens: $T = b \cdot h^2$; $b > 0$; $h > 0$
(genauer: Tragfähigkeit des Balkens: $T = c \cdot b \cdot h^2$, wobei c eine materialabhängige Konstante ist; ohne Einschränkung kann $c = 1$ gewählt werden)
Balkendiagonale entspricht dem Stammdurchmesser (Nebenbedingung, Satz des Pythagoras):
$d^2 = b^2 + h^2$; $h^2 = d^2 - b^2 = 30^2 - b^2$
Tragfähigkeit des Balkens (Zielfunktion):
$T(b) = b \cdot (30^2 - b^2) = 900b - b^3$
Untersuchung der Zielfunktion: $T'(b) = 900 - 3b^2$;
$T'(b) = 0$ für $b_1 = \sqrt{300} \approx 17{,}32$; $b_2 = -\sqrt{300}$ entfällt, da $b > 0$ gelten muss. Die Zielfunktion T hat an der Stelle b_1 einen Vorzeichenwechsel von + nach −, folglich ist die Tragfähigkeit des Balkens für $b_1 \approx 17{,}32$ cm maximal. Die Balkenhöhe beträgt $h_1 = \sqrt{600}$ cm $\approx 24{,}49$ cm.
b) Der Anteil des Holzes für den Balken am gesamten Stamm entspricht dem Anteil der Querschnittsfläche des Balkens an der Querschnittsfläche des Stammes.
$\frac{b_1 \cdot h_1}{\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx 0{,}600 = 60\,\%$

5



Grundseite des Dreiecks: $f(a) - g(a)$
Höhe des Dreiecks: a
Die Dreieckfläche hat den Wert
$A(a) = \frac{1}{2}a \cdot (f(a) - g(a)) = \frac{1}{2}a \cdot \left(-\frac{1}{5}a^3 + 5a - a\right)$
$A(a) = -\frac{1}{10}a^4 + 2a^2$
$A'(a) = -\frac{2}{5}a^3 + 4a = 0$
$a = 0$ und $a = -\sqrt{10}$ entfallen als Lösung.
Nachweis für $a = \sqrt{10}$:
$A''(a) = -\frac{6}{5}a^2 + 4$, also $A''(\sqrt{10}) = -\frac{60}{5} + 4 < 0$
Die Dreiecksfläche ist bei $a = \sqrt{10}$ maximal.